У вересні-жовтні 2017 року відбудеться XX обласний турнір юних математиків. Заявки на участь приймаються до 18 вересня 2017 року

Питання
XX обласного турніру юних математиків

1. «Будуємо трапецію»

У рівнобічній трапеції $ABCD$ з основами AD та BC діагоналі перетинаються в точці P, а прямі AB та CD – в точці Q. O_1 та O_2 – центри кіл, описаних навколо трикутників ABP та CDP, r – радіус цих кіл. Побудуйте трапецію $ABCD$ за даними відрізками O_1O_2, PQ та радіусом r.

2. «Три дотичні»

На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC відмітили точки P, Q, R відповідно. a – дотична в точці A до описаного кола трикутника AQR, b – дотична в точці B до описаного кола трикутника BPR, c – дотична в точці C до описаного кола трикутника CPQ. Нехай X – точка перетину прямих b та c, Y – точка перетину прямих c та a, Z – точка перетину прямих a та b. Доведіть, що прямі AX, BY, CZ перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли прямі AP, BQ, CR перетинаються в одній точці.

3. «Спільні дотичні»

У нерівнобедреному трикутнику ABC проведено висоти AH, BT, CR. На стороні BC відмітили точку P; точки X та Y – проекції P на AB та CA відповідно. Дві спільні зовнішні дотичні до описаних кіл трикутників XBH та HCY перетинаються в точці Q. Прямі RT та BC перетинаються в точці K.

3.1. Доведіть, що точка Q лежить на фіксованій прямій незалежно від вибору P.

3.2. Доведіть, що $KQ = QH$.

4. «Цілочисловий трикутник»

Укажіть хоч один прямокутний трикутник ABC із цілочисловими сторонами, всередині якого можна вказати таку точку M, що довжини відрізків MA, MB та MC є цілими. Чи існує безліч таких трикутників, жодні два з яких не є подібними?

5. «Числа Фібоначчі та площі»

Послідовність Фібоначчі задається рівностями $F_1 = F_2 = 1,\ F_{k+2} = F_k + F_{k+1},\ k \in N$.

5.1. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ площа трикутника $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$ дорівнює 0,5.

5.2. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$, $A_4(F_{m+7}; F_{m+8})$ є трапецією, площа якої дорівнює 2,5.

5.3. Доведіть, що площа многокутника $A_1A_2...A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, ..., $A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$ не залежить від вибору числа $m \geq 0$, та знайдіть цю площу.

6. «Числа Фібоначчі та Люка»

Числа Люка задаються рівностями $L_1 = 1,\ L_2 = 3,\ L_{k+2} = L_k + L_{k+1},\ k \in N$. Числа Фібоначчі по-значені F_k .

6.1. Для кожного $n \geq 1$ доведіть, що

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} + \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{L_{2n-1}}{L_{2n+1}} + \frac{L_{2n+1}}{L_{2n-1}} - \frac{5}{L_{2n-1}L_{2n+1}}.$$

6.2. Запропонуйте і доведіть аналогічну рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами.

7. «Система з числами Фібоначчі»

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x_1^3 + x_1 + x_2 = F_1 x_1^2 + F_3,$$

$$x_2^5 + x_2 + x_3 = F_2 x_2^4 + F_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{2016}^{4033} + x_{2016} + x_{2017} = F_{2016} x_{2016}^{4032} + F_{2018},$$

$$x_{2017}^{4035} + \frac{F_{2019} - 1}{F_{2017}} x_{2017} + x_1 = F_{2017} x_{2017}^{4034} + F_{2019}.$$

8. «Рівняння з біноміальними коефіцієнтами»

Знайдіть всі натуральні числа $n,\ k$ такі, що $C_{n-1}^{k+1} = C_{n+1}^{k-1}$.

9. «Сума кубів»

Знайдіть хоч одну четвірку натуральних чисел $a,\ b,\ c,\ d$ таких, що $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$. Скінченною чи нескінченною є множина таких четвірок за умови, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число?

10. «Фарбуємо клітинки»

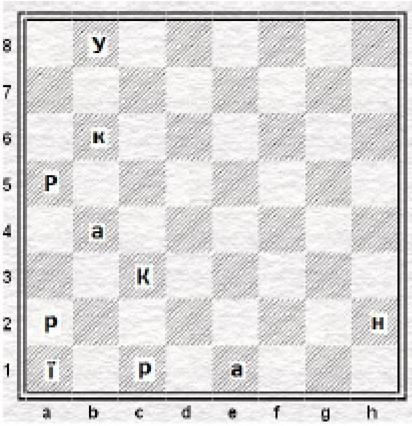
Клітинки дошки 8×8 розфарбовані в шаховому порядку. За один хід можна вибрати клітинку дошки та одночасно перефарбувати в протилежний колір усі клітинки, що мають із нею спільну сторону, при цьому сама клітинка не перефарбовується. Чи можна за декілька ходів перефарбувати в протилежний колір усі клітинки дошки?

11. «Фарбуємо паркан»

Паркан складається з 20 непофарбованих дошок. Марічка і Петрик по черзі фарбують дошки в блакитний або жовтий колір (кожен з гравців може пофарбувати будь-яку непофарбовану дошку в будь-який із двох кольорів). Починає Марічка. Вона хоче, щоб у пофарбованому паркані було якомога більше кольорових переходів, Петрик – щоб їх було якомога менше. Таким чином, ідеал Марічки – це паркан, пофарбований у шаховому порядку (19 переходів), а ідеал Петрика – однокольоровий паркан (0 переходів). Як слід грати Марічці та Петрику, щоб кожен з них досягнув своєї мети, та яку кількість кольорових переходів матиме паркан?

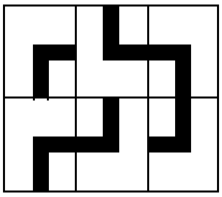
12. «Ребус *Україна*»

На діаграмі зображено позицію, яка могла би виникнути в шаховій партії. Різні літери позначають різні шахові фігури. Великі літери відповідають певному кольору фігури, маленькі – іншому кольору. Треба визначити цю позицію.



13. «Кутики обертаються»

У кожній комірці прямокутної таблиці $m \times n$ розташовано по одному кутику ┌, ┐, ┘ або └, причому вершини кутиків збігаються з центрами комірок. Приклад розташування кутиків для $m = 3$, $n = 2$ зображено на рисунку.



Щосекунди всі кутики, які дотикаються бодай до одного іншого кутика, водночас повертаються на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо центра своєї комірки. Доведіть, що незалежно від розмірів таблиці та початкового розташування кутиків рано чи пізно їхній рух припиниться.

14. «Рахуємо перестановки»

Для множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ позначимо через U_k кількість її перестановок, в яких рівно k елементів залишаються на своїх місцях.

14.1. Доведіть, що $\sum_{k=1}^{n} kU_k = n!$

14.2. Для $n \geq 3$ доведіть нерівність $\frac{n!}{2} \leq \sum_{k=2}^{n} kU_k \leq \frac{2 \cdot n!}{3}$.

14.3. Доведіть, що $\sum_{k=1}^{n} k^2 U_k = 2 \cdot n!$

15. «Розбиття на доданки»

Доведіть, що існує таке число n, що кожне натуральне число, яке перевищує n, можна розбити на п'ять взаємно простих доданків, які більші за 1.

16. «Цікава послідовність»

Про збіжну послідовність $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, a_2, a_3, $\ldots$ відомо, що її члени з непарними номерами спадають, а з парними номерами – зростають і, крім того, для всіх $n \geq 1$ справджується нерівність

$$2 \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq 3.$$

Знайдіть межі, в яких може знаходитись границя цієї послідовності.

17. «Багато дільників»

Яку найбільшу кількість дільників може мати число m, якщо відомо, що воно менше за $1\,000\,000$? (Одиниця та m також вважаються дільниками).

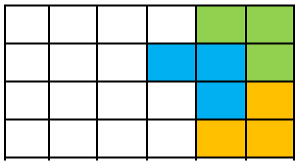
18. «Розфарбування множин»

18.1. Маємо n множин, кожна з яких містить рівно 3 елементи. (Зауважимо, що елемент може належати більше ніж одній множині, але множина не може містити елемент більш ніж один раз. Деякі множини можуть співпадати.) Кожен з елементів фарбують у жовтий або блакитний колір. Знайти всі значення n, при яких обов'язково існує таке розфарбування, що жодна з множин не буде однокольоровою.

18.2. Те саме завдання для множин, кожна з яких містить рівно 4 елементи.

19. «Плиточник із калькулятором»

Прямокутник розміром $4\times 3n$ повністю без накладань покривають плиткою Г-подібної форми, яка складається з трьох плиток розміру 1×1. Знайдіть (або оцініть) кількість варіантів покриття. *Приклад частини покриття наведений на рисунку.*



20. «Безконфліктні фішки»

20.1. На деяких клітинках дошки $n\times n$ стоять фішки (не більше однієї фішки на клітинці) так, що жодні чотири фішки не знаходяться у вершинах прямокутника. Доведіть, що кількість фішок не перевищує $n\left(\sqrt{n}+1\right)$.

20.2. Для яких n ви зможете розмістити $n\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)$ фішок на дошці $n\times n$ так, щоб жодні чотири фішки не стояли у вершинах прямокутника? (Тут $\left[x\right]$ позначає цілу частину числа x).

ЗАЯВКА
на участь в ХХ обласному турнірі юних математиків
(2017 – 2018 н. р.)

____
(назва філії, н/т, НВК, школи, ліцею, гімназії)

№	Прізвище, ім'я, по батькові	Рік народження	Клас	Навчальний заклад

Керівник команди ____
(прізвище, ім'я, по батькові, займана посада)

Мобільний телефон керівника команди (обов'язково)_________________________

Адреса і контактний телефон ____
____

Директор ____________________

М.П.