Додаток 1
до листа управління освіти і
науки облдержадміністрації
______________№ _____

Завдання XXIVобласного турніру юних математиків
(2023-2024 н.р.)

1. «Спритні модулі»

Функція f, натуральне число k та числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ є такими, що f лінійна на кожному із проміжків $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_k, +\infty)$. Доведіть, що f можна єдиним чином зобразити у вигляді

$$f(x) = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \ldots + a_k|x - x_k| + a_{k+1}x + a_{k+2},\ x \in R$$

де a_1, …, a_{k+2} – деякі дійсні числа.

2. «Рівняння в раціональних числах»

а) Доведіть, що існує безліч пар (x, y) додатних раціональних чисел, що

б) знайдіть усі такі пари.

3. «Від ТЮМу-23 до ТЮМу-24»

Знайдіть усі пари натуральних чисел x та y таких, що $23 + x^2 = 24y^2$.

4. «Ланцюжок коренів»

Для всіх натуральних n доведіть нерівність

$$\sqrt{1^3 + \sqrt{2^3 + \ldots + \sqrt{n^3}}} < 3.$$

5. «Діофантові рівняння і подільність».

а) Нехай a та b – натуральні числа такі, що

$$a > b,\ \ a^b + b^a = (4n-1)^{2n-1}.$$

Доведіть, що a ділиться націло на $(2n-1)^2$ при кожному натуральному n.

б) Нехай a та b – натуральні числа такі, що

$$a > b,\ \ a^b + b^a = (2L_{3n} - 1)^{F_{3n-1}+F_{3n+1}-1}.$$

Доведіть, що число $\dfrac{a}{\left(\sum\limits_{k=0}^{3n-2} L_k\right)^2}$ також натуральне при кожному натуральному n. (*Числа Фібоначчі* F_n *та Люка* L_n *визначаються відповідно формулами:* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ $(n \ge 1)$ та $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+1} = L_{n-1} + L_n$ $(n \ge 1)$.

6. **«Нерівність зі степенями»**

Для дійсних чисел $a < b$ доведіть нерівність

$$\left(2^b - 2^a\right)\left(3^b - 3^a\right) < \frac{b-a}{2}\left(6^b - 6^a\right).$$

7. **«Розрізання трапеції»**

Розріжте рівнобічну трапецію на три подібні між собою трапеції всіма можливими способами. Для рівнобічної трапеції з основами a та b і бічною стороною $c = 1$ з'ясуйте необхідні та достатні умови реалізації кожного способу розрізання.

8. **«Відкладаємо рівні відрізки»**

У трикутнику ABC кут C дорівнює 20°. Відкладемо на стороні AC відрізок $MC = AB$, а на стороні BC – відрізок $CK = AM$. Знайдіть величину кута MKC, якщо кут BAC дорівнює:

а) 20°; б) 40°; в) 60°; г) 80°.

9. **«Циклічна четвірка точок»**

У трикутнику ABC точка I — інцентр, точка I_a — центр зовнівписаного кола, що дотикається сторони BC. З вершини A всередині кута BAC провели промені AX та AY. Промінь AX перетинає прямі BI, CI, BI_a, CI_a в точках X_1, …, X_4 відповідно, а промінь AY перетинає ці ж прямі в точках Y_1, …, Y_4 відповідно. Виявилося, що точки X_1, X_2, Y_1, Y_2 лежать на одному колі. Доведіть рівність

$$\frac{X_1X_2}{X_3X_4} = \frac{Y_1Y_2}{Y_3Y_4}.$$

10. **«Два кола»**

У гострокутному трикутнику ABC провели *чевіану* AP та відмітили центр O описаного кола. Описане коло трикутника ABP вдруге перетинає пряму AC в точці X, описане коло трикутника ACP вдруге перетинає пряму AB в точці Y. Доведіть, що прямі XY та PO перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли P – основа бісектриси трикутника ABC.

11. **«Три квадрати»**

На стороні CD квадрата $ABCD$ обрано точку F та побудовано два рівні квадрати $DGFE$ та $AKEH$ (точки E і H лежать всередині квадрата). Нехай M – це середина DF, J – інцентр трикутника CFH. Доведіть, що:

а) точки D, K, H, J, F лежать на одному колі;

б) кола, вписані в трикутники CFH та GMF, мають однакові радіуси.

12. «Рівняння з раціональними коренями»

а) Доведіть, що для всіх додатних раціональних чисел $r \neq 1$ існує єдина пара взаємно простих натуральних чисел a та b таких, що число r є коренем рівняння $x^4 = \dfrac{ax-b}{bx-a}$.

б). Доведіть, що існує нескінченна кількість пар взаємно простих натуральних чисел a та b таких, що усі три дійсні корені рівняння $x^4 = \dfrac{ax-b}{bx-a}$ є трьома різними раціональними числами.

13. «Ощадливі перестановки»

Чудний чоботар Чеслав зшив 30 різних пар взуття, перемішав усі 60 чоботів між собою та розставив випадковим чином у ряд. Його педантична подруга Павлина переставляє взуття: за один раз Павлина може взяти будь-які два чоботи та обміняти їх місцями. За яку мінімальну кількість таких обмінів Павлина зможе гарантовано досягти розташування, в якому кожна пара чоботів розташована поруч, причому ліворуч стоїть лівий чобіт пари, а праворуч — правий?

14. «Сума дробів»

Раціональне число r=0.1415926..., складене із першої тисячі знаків десяткового розкладу числа $\pi - 3$. Почнемо виписувати число $s = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots$ за таким правилом: на кожному кроці для натурального n до суми додається дріб $\frac{1}{n}$, найбільший із можливих, але так, щоб сума не виявилася більшою за число r. Таким чином, враховуючи, що $\frac{1}{7} = 0,142\ldots > r$, пишемо $s = \frac{1}{8} + \ldots$; далі, оскільки $\frac{1}{8} + \frac{1}{60} = 0,14166\ldots > r$, пишемо $s = \frac{1}{8} + \frac{1}{61} + \ldots$ тощо. Доведіть, що цей процес обірветься, тобто на деякому кроці виявиться, що записано точнісінько число r.

15. «Сума цифр кратного»

а) Відомо, що натуральне число N менше за 10^n. Шукаємо таке натуральне M що воно ділиться на N, а *сума цифр* числа M не перевищує числа k. Для якого найменшого k можна стверджувати, що таке число M в усіх випадках існує?

б) Та сама задача, але відомо, що $N < 999999$.

16. «З'єднуємо точки»

На площині розміщено мільйон точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Дев'ять гравців по черзі сполучають ці точки відрізками, кожний олівцем свого кольору. За один хід дозволяється сполучити довільні дві точки, які ще не були з'єднані. Виграє той, хто першим отримає трикутник з вершинами в заданих точках, *усі сторони якого мають однаковий колір*. Чи може така гра закінчитися внічию?

17. «Дописуємо трійки»

Марійка та Миколка грають у таку гру. Спочатку Миколка називає деяке *просте* число p. Після цього Марійка записує на дошці натуральне число n. Тоді Миколка дописує до цього числа справа одну чи декілька цифр 3. Він виграє, якщо отримане таким чином число ділиться на p. В іншому разі – перемагає Марійка. Хто з них виграє, якщо обоє прагнуть перемогти?

18. «Чудовий квадрат»

У клітинки квадрата 5×5 Петрик і Ганнуся по черзі (першим ходить Петрик) вписують цифри від 1 до 9. Квадрат називається *чудовим*, якщо після заповнення всіх клітинок суми усіх дев'яти чисел у кожному меншому квадраті 3×3:

а) належать діапазону [37; 53];

б) належать діапазону [38; 52].

Петрик любить чудеса і хоче зробити квадрат *чудовим*. Чи вдасться Ганнусі йому завадити?

19. «Блукання по дільниках»

Двоє гравців та суддя грають у таку гру. Суддя випадковим чином вибирає один із натуральних дільників деякого фіксованого числа n та називає його, а далі гравці по черзі *множать* останній названий дільник на 2, або *множать* його на 5, або ж *ділять* його на 10 – так, щоб отриманий результат був знову натуральним дільником числа n, який ніхто ще не назвав. Гравець, який не може зробити хід, програє. Яка ймовірність того, що за правильної гри обох гравців виграє перший гравець, якщо: а) $n=10^6$, б) $n=10^{2k}$, $k\in N$.

Додаток 2
до листа управління освіти і
науки облдержадміністрації
____________№ _____

ЗАЯВКА
на участь в XXIV турнірі юних математиків
(2023 – 2024 н.р.)

____
(назва філії, н/т, НВК, школи, ліцею, гімназії)

№	Прізвище, ім’я, по батькові	Навчальний заклад	Клас	Електронна адреса	Мобільний телефон

Керівник команди ____
(прізвище, ім’я, по батькові, займана посада)

Мобільний телефон керівника команди __________________________

Електронна адреса керівника команди ___________________________

Директор ________________

М.П.