

10 клас

*«Вчити себе самого – благородна справа, але ще більш
благородна – вчити інших; до речі, останнє куди легше».*
Марк Твен

10.1. На координатній площині задані 6 точок: $A(-2, -2)$, $B(-1, -3)$, $C(0, 2)$, $D(1, -1)$, $E(2, 6)$ та $F(3, 13)$. Яка найбільша кількість з цих точок можуть лежати на параболі $y = ax^2 + 2ax + b$ при деяких дійсних числах a та b ?

10.2. Знайдіть таке найменше натуральне число $n \geq 3$, що для довільних n дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, не обов'язково різних, існують такі три індекси $1 \leq i < j < k \leq n$, для яких $x_i x_j + x_j x_k + x_k x_i \geq 0$.

10.3 Трикутник ABC вписаний у коло ω . На прямій BC обрано деякі точки P та Q так, що вони лежать у порядку P, B, C та Q . Відрізки AP та AQ перетинають вдруге коло ω в точках E та F відповідно. Виявилося, що серединні перпендикуляри до відрізків EP та FQ дотикаються кола ω . Доведіть, що $AP = AQ$.

10.4. Для натурального числа n позначимо через $d(n)$ найбільший дільник числа n , що не перевищує $\sqrt{n}$. Наприклад, $d(2) = 1$, $d(6) = 2$, $d(9) = 3$. Доведіть, що для кожного натурального числа $k \geq 2$ існує нескінченно багато натуральних чисел, які мають рівно k натуральних дільників та які не можна подати у вигляді $n + d(n)$ для деякого натурального n .

10.5. Деяка країна має скінченну кількість міст, одне з яких є столицею. Відомо, що між деякими містами цієї країни прокладено шосе (такі міста будемо називати *сусідніми*), причому від будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого (можливо через інші міста) єдиним чином, не повертаючись у вже проїхані міста. Таке сполучення називатимемо *шляхом* між цими містами. Довжина шляху – це кількість усіх міст, через які проходить цей шлях, а k -тою областю країни називатимемо усі міста, які сполучені зі столицею шляхом довжини k . З кожного міста виходить щонайбільше 3 шосе, окрім столиці, з якої виходить щонайбільше 2 шосе. У кожному місті можуть працювати таксисти, причому спочатку в кожному місті деякої області працює однакова кількість таксистів, а в інших областях таксистів немає. Щодня голова таксомоторної компанії може виконати одну з двох таких операцій:

- обрати місто, з якого виходить три шосе та перевести у кожне з трьох сусідніх з ним міст деяку однакову кількість таксистів з обраного міста;
- обрати місто, з якого виходить три шосе та однакову кількість таксистів з кожного з трьох сусідніх міст і перевести цих таксистів в обране місто.

Виявилося, що в деякий момент часу в кожній області або взагалі немає таксистів, або знаходиться однакова кількість таксистів. Доведіть, що в цей момент всі таксисти працюють в одній області.