

9 клас

*«Вчити себе самого – благородна справа,
але ще більш благородна – вчити інших;
до речі, останнє куди легше».*
Марк Твен

9.1. Додатні числа a та b задовольняють умову:

$$\frac{a-1}{b-1} + \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = 3.$$

Чи обов'язково звідси випливає, що $a = b$?

9.2. Скількома способами можна в один рядок записати у деякому порядку числа $1, 2, \dots, 10$ так, щоб усі прості числа йшли зліва направо у порядку зростання, а усі складені числа – у порядку спадання? Наприклад, розстановка чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ – умову не задовольняє, а розстановка $1, 2, 3, 5, 7, 10, 9, 8, 6, 4$ – задовольняє.

9.3. Всередині гострокутного трикутника ABC обрано точку P , а на сторонах AC та AB – точки Y та Z відповідно так, що $PA = PY = PZ$. На відрізку BC знайшлася така точка X , що $\angle XZP = \angle ABC$ та $\angle XYP = \angle ACB$. Доведіть, що AH – висота $\triangle ABC$.

9.4. Додатні числа a, b, c, d є довжинами сторін деякого, не обов'язково опуклого, чотирикутника. Чому може дорівнювати найбільше можливе значення виразу

$$\frac{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}?$$

9.5. Знайдіть усі трійки цілих невід'ємних чисел (m, n, k) , що задовольняють рівності $2^{(2^m)} + 3^n + 15 = k^2$.

9 клас

*«Вчити себе самого – благородна справа,
але ще більш благородна – вчити інших;
до речі, останнє куди легше».*
Марк Твен

9.1. Додатні числа a та b задовольняють умову:

$$\frac{a-1}{b-1} + \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = 3.$$

Чи обов'язково звідси випливає, що $a = b$?

9.2. Скількома способами можна в один рядок записати у деякому порядку числа $1, 2, \dots, 10$ так, щоб усі прості числа йшли зліва направо у порядку зростання, а усі складені числа – у порядку спадання? Наприклад, розстановка чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ – умову не задовольняє, а розстановка $1, 2, 3, 5, 7, 10, 9, 8, 6, 4$ – задовольняє.

9.3. Всередині гострокутного трикутника ABC обрано точку P , а на сторонах AC та AB – точки Y та Z відповідно так, що $PA = PY = PZ$. На відрізку BC знайшлася така точка X , що $\angle XZP = \angle ABC$ та $\angle XYP = \angle ACB$. Доведіть, що AH – висота $\triangle ABC$.

9.4. Додатні числа a, b, c, d є довжинами сторін деякого, не обов'язково опуклого, чотирикутника. Чому може дорівнювати найбільше можливе значення виразу

$$\frac{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}?$$

9.5. Знайдіть усі трійки цілих невід'ємних чисел (m, n, k) , що задовольняють рівності $2^{(2^m)} + 3^n + 15 = k^2$.